

文章编号: 1000-5641(2007)01-0062-03

2-边着色图中的单色三角形

张燕, 任韩

(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 研究2-边着色的完全图 K_n 中单色三角形的最少数目, 利用邻接矩阵方法确定了最少数目的精确值.

关键词: 2-边着色; 单色三角形; t -数

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

Number of 0-1 Triangles in Edge-Coloring of Complete Graphs

ZHANG Yan, REN Han

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: This paper studied the lower bound for the number of triangles having the same color in any 2-edge-colored complete graph, and found the exact number of such triangles by means of adjacency matrix.

Key words: 2-edge coloring; 0-1 triangles; t -number

0 引言

Ramsey 定理表明: 在 n 个节点的完全图 K_n 中, 只要 n 充分大, 则 K_n 的任一2-边着色图中必有特定阶数的同色的完全子图. 例如: K_6 的任一2-边着色图中至少含有一个单色三角形^[1]. 现在, 进一步研究该问题: 是否存在 K_6 的一个2-边着色图, 使得其中有且仅有一个单色三角形? 如果不存在, 那么 K_6 的任一2-边着色图中至少有多少个单色三角形? 另外, 对于任意 $n \in \mathbf{N}$, K_n 的任一2-边着色图中又至少有多少个单色三角形? 为了解决该问题, 本文引用定义 Ramsey 数^[2]的方法, 类似地定义了 t -数. 并求出了 K_n 所对应的 t -数的值.

1 主要结论

定义 1 如果对于完全图 K_n 的任一2-边着色图中至少含有 t_n 个单色三角形, 并且存在这样的2-边着色图, 使得其中有且仅有 t_n 个单色三角形, 即

$$t_n = \min\{G \text{ 中单色三角形的个数} \mid G \text{ 为 } K_n \text{ 的任一 2-边着色图}\},$$

那么我们称 t_n 为 K_n 的 t -数.

定义 2 记 $\text{sum}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$, 其中 $\mathbf{X} = (x_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶实矩阵.

收稿日期: 2005-01

基金项目: 国家自然科学基金(10274048); 上海市科委基础研究重点项目(O4JC14031)

第一作者: 张燕(1982-), 女, 硕士生.

通讯作者: 任韩(1958-), 男, 副教授.

性质 $\text{sum}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \text{sum}(X) + \beta \text{sum}(Y)$, $\forall X, Y \in n$ 阶方阵, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

定义 3 [3] 两个 n 阶方阵 A 与 B 的 Hadamard 积定义为 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{n \times n}$, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$.

引理 1 若 A 为 n 阶简单图 G 的邻接矩阵, 则 G 中 3-圈的个数为 $\frac{1}{6}\text{sum}(A \circ A^2)$.

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E(G) \\ 0 & (i, j) \notin E(G) \end{cases}$, 则

$$A \circ A^2 = \left(a_{ij} \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \right)_{n \times n}.$$

由于 $\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}$ 表示从点 i 到点 j 长为 2 的路的个数, 那么 $a_{ij} \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}$ 表示经过点 i, j 的 3-圈的个数. 又因为 $(A \circ A^2)^T = A \circ A^2$, 且 3-圈中有三条边, 所以在 $\text{sum}(A \circ A^2)$ 中, 任一 3-圈被重复计算了 6 次. 所以 G 中 3-圈的个数为 $\frac{1}{6}\text{sum}(A \circ A^2)$.

定理 1 $t_{2m} = 2C_m^3, m \geq 3$.

证明 任取 $K_{2m}(m = 3, 4, 5, \dots)$ 的一个 2-边着色图 G , 设 $A = (a_{ij})_{2m \times 2m}$, $B = (b_{ij})_{2m \times 2m}$ 分别为 G 的红色与蓝色子图的邻接矩阵, 则

$$A, B \in \{X = (x_{ij})_{2m \times 2m} | X = X^T, x_{ii} = 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall 1 \leq i, j \leq 2m\}.$$

且 $A + B = J - I$, 其中 J 为全 1 矩阵, I 为单位矩阵. 由引理 1 得, G 中的单色三角形个数为 $\frac{1}{6}\text{sum}(A \circ A^2 + B \circ B^2)$. 通过计算得

$$\text{sum}(A \circ A^2 + B \circ B^2) = 8m^3 - 12m^2 + 4m + (3 - 6m) \sum_{i=1}^{2m} d_i + 3 \sum_{i=1}^{2m} d_i^2.$$

其中 d_i 为点 i 处红色边的个数, 即 $d_i = \sum_{k=1}^{2m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{2m} a_{ki}$. 注意到, 若 K_{2m} 中红色边的总数 $\sum_{i=1}^{2m} d_i$ 固定, 则当 $|d_i - d_j| \leq 1, \forall 1 \leq i, j \leq 2m$ 时, $\text{sum}(A \circ A^2 + B \circ B^2)$ 取到最小值. 故,

$$\begin{aligned} & 6t_{2m} - (8m^3 - 12m^2 + 4m) \\ &= \min \left\{ (3 - 6m)(2\alpha m + \beta) + 3\beta(\alpha + 1)^2 + 3(2m - \beta)\alpha^2 \mid \alpha \in \left[0, \frac{2m-1}{2}\right], \beta \in [0, 2m) \right\} \\ &= \min \left\{ 6m\alpha^2 - (12m^2 - 6m - 6\beta)\alpha + (6 - 6m)\beta \mid \alpha \in \left[0, \frac{2m-1}{2}\right], \beta \in [0, 2m) \right\} \\ &= \min_{\beta \in [0, 2m)} \left\{ 6m\alpha^2 - 6(2m^2 - m - \beta)\alpha + 6(1 - m)\beta, \alpha = \text{round}\left(m - \frac{m + \beta}{2m}\right) = m - 1 \right\} \\ &= -6m^3 + 6m^2. \end{aligned}$$

这里, $\text{round}(x)$ 表示对 x 四舍五入. 所以, $t_{2m} = 2C_m^3$. 另一方面, 可以构造 $2m$ 阶的 2-边着色图 G , 使得 G 中恰好有 $2C_m^3$ 个单色三角形. 例如: 将 G 的顶点集分成两部分 $V_1 = \{1, \dots, m\}$, $V_2 = \{m+1, \dots, 2m\}$, 取 G 的红色边集 $E_1 = \{(i, m+j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$, 如图 1.

定义 4 设图 G 中的 n 个顶点分别为 $\{1, \dots, n\}$, 则记 G 中经过点 $i(1 \leq i \leq n)$ 的单色三角形个数为 $u_i(G)$.

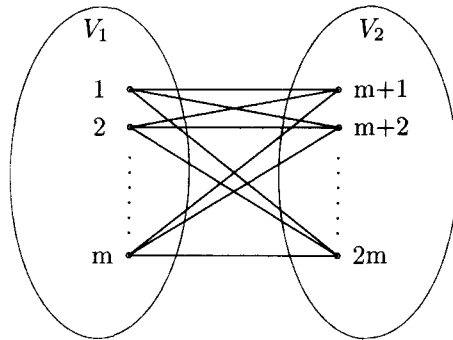


图1 一个达到极值的图

Fig. 1 An extremal graph which attends $2C_m^3$

引理 2 $t_{n+1} \geq \frac{n+1}{n-2}t_n$.

证明 设 G 为 K_{n+1} 的一个 2-边着色图, 并且 G 中有且仅有 t_{n+1} 个单色三角形. 设 G 的 $n+1$ 个点分别为 $\{1, 2, \dots, n+1\}$, 那么, $\sum_{i=1}^{n+1} u_i(G) = 3t_{n+1}$. 由平均值原理得, 存在点 $k (1 \leq k \leq n+1)$, 使得 $u_k(G) \geq \frac{3}{n+1}t_{n+1}$. 再考虑 G 中的 n 个点 $1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1$ 构成的完全图, 其中至少有 t_n 个单色三角形, 且这些三角形都不经过点 k . 所以, G 中至少含有 $t_n + u_k$ 个单色三角形, 因此 $t_{n+1} \geq t_n + u_k \geq t_n + \frac{3}{n+1}$, 则 $t_{n+1} \geq \frac{n+1}{n-2}t_n$.

定理 2 $t_{2m+1} = C_m^3 + C_{m+1}^3 - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, m \geq 3$.

证明 由引理 2 及定理 1 得

$$\begin{aligned} t_{2m+1} &\geq \frac{2m+1}{2m-2}t_{2m} = \frac{2m+1}{2m-2}C_m^3 = \frac{(2m+1)m(m-1)(m-2)}{6(m-1)} \\ &\geq C_m^3 + C_{m+1}^3 - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor. \end{aligned}$$

另一方面, 可以构造 $2k+1$ 阶的 2-边着色图 G , 使其恰好有 $C_m^3 + C_{m+1}^3 - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 个单色三角形. 例如, 将 G 的顶点集分成两部分 $V_1 = \{1, \dots, m\}, V_2 = \{m+1, \dots, 2m+1\}$. 当 m 为奇数时, 取 G 的红色边集 $E_1 = \{(i, m+j), (m, j) | i \neq j, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m+1\} \cup \{(m+2i-1, m+2i) | 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}\}$, 如图 2(a). 当 m 为偶数时, 则取 $E_1 = \{(i, m+j) | i \neq j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+1\} \cup \{(m+2i-1, m+2i) | 1 \leq i \leq \frac{m}{2}\}$, 如图 2(b).

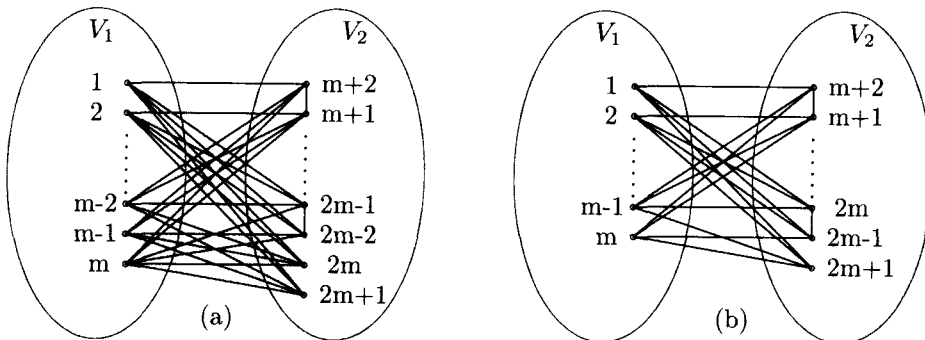


图2 一个达到极值的图; (a) m 为奇数, (b) m 为偶数

Fig. 2 An extremal graph which attends $C_m^3 + C_{m+1}^3 - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

(下转第 69 页)

因为 $(-\tilde{\eta}'_1, \tilde{\eta}'_2) \stackrel{d}{=} (\tilde{\eta}'_1, \tilde{\eta}'_2)$, 并且 $g(\cdot)$ 为对称函数, 于是

$$\begin{aligned} E_0 g(\delta(y)) &= E_0 g(\mathbf{B}\tilde{\eta}_1 + h(\tilde{\eta}_2)) \\ &= E_0 g(-\mathbf{B}\tilde{\eta}_1 + h(\tilde{\eta}_2)) \\ &= E_0 g(\mathbf{B}\tilde{\eta}_1 - h(\tilde{\eta}_2)), \end{aligned}$$

再由 $g(\cdot)$ 为凸函数,

$$\begin{aligned} E_0 g(\hat{\beta}(\Sigma_0)) &= E_0 g(\mathbf{B}\tilde{\eta}_1) \\ &\leq \frac{1}{2} E_0 g(\mathbf{B}\tilde{\eta}_1 - h(\tilde{\eta}_2)) + \frac{1}{2} E_0 g(\mathbf{B}\tilde{\eta}_1 + h(\tilde{\eta}_2)) \\ &= E_0 g(\delta(y)), \end{aligned}$$

于是有 $E_{\beta g}(\hat{\beta}(\Sigma_0) - \beta) \leq E_{\beta g}(\delta(y) - \beta)$. 定理证毕.

由定理 2.1, 我们得到当误差项 ε 的分布在 $\mathcal{P}'(\Sigma) = \bigcup\{EC_n(0, \Sigma, \varphi) \mid \Sigma = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}' + \Sigma_0\mathbf{Z}\Delta\mathbf{Z}'\Sigma_0, \Lambda \in \varphi(p), \Delta \in \varphi(n-p)\}$ 中变动时, 对于任何对称的凸损失函数, $\hat{\beta}(\Sigma_0)$ 都是最佳同变估计.

[参 考 文 献]

- [1] 王松桂, 史建红, 尹素菊, 等. 线性模型引论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] KARIYA T, KURATA H. A maximal extension of the Gauss-Markov theorem and its nonlinear Version [J]. J Multivariate Anal, 2002, 83: 37-55.
- [3] BERK R, HWANG J T. Optimality of the least squares estimator [J]. J Multivariate Anal, 1989, 30: 245-254.
- [4] FANG K T, KOTZ S, Ng K W. Symmetric Multivariate and Related Distributions [M]. New York: Chapman and Hall, 1990.
- [5] 陈希孺, 王松桂. 线性模型中的最小二乘法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2003.
- [6] EATON M L. Concentration inequalities for Gauss-Markov estimator [J]. J Multivariate Anal, 1988, 25: 119-138.

(上接第 64 页)

[参 考 文 献]

- [1] BONDY J A, MURTY U S A. Graph Theory with Application[M]. London: Macmillan, 1976
- [2] SHIU W C, LAM P C B, LI Y. On generalized Ramsey numbers[J]. Disc Math, 2002, 258: 383-388.
- [3] ZHAN X. Matrix Inequalities: LNM 1790[M]. Berlin: Springer, 2002.